黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

mathtod.online/@tcys123457/181…

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{mn^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

の類の公式には大幅な一般化が知られています。

多重ゼータ値
multiple zeta

についてググれば解説がたくさん出て来ます。たとえば

gcoe-mi.jp/temp/publish/b3ab8d…

これのp.5に上の公式の証明があります。

2017年05月27日 22:33 · Web · 1 · 2 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 28
ちなみに、調和数

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

とディガンマ函数

$$\psi(s) = \frac{d}{ds}\log\Gamma(s)$$

について

$$\psi(n+1) = -\gamma + H_n$$

が成立しています。だから H_n は非整数の n についても定義されているとみなせます。他にも

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k$$

も成立しています。ディガンマ函数はゼータ函数の正の整数での特殊値の母函数になっています。

$H(s,x) = (s-1)\log x - x$ とおくと、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty dx\, e^{-H(s,x)}$$

なので、ガンマ函数も分配函数の一種です。分配函数の対数微分(の -1 倍)は内部エネルギーの期待値になるのでした。ディガンマ函数はガンマ函数からそのようにして作られた函数です。